CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES

Correction

a) Les racines du polynôme unitaire de degré n sont les racines n-ième de l'unité. On a déjà vu :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k) \quad \text{avec } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

b) On a d'autre part $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + \cdots + X + 1)$. Comme $\mathbb{C}[X]$ est intègre, en simplifiant par $X-1$ dans les deux factorisations de $X^n - 1$, on obtient

$$1 + X + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k).$$

c) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$1 - \omega_k = 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = -2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}.$$

En spécifiant en $X = 1$ dans la factorisation obtenue lors de la question précédente, il vient

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} [1 - \omega_k] = \prod_{k=1}^{n-1} \left[-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right] = (-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left[e^{\frac{ik\pi}{n}} \right] \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right] \\ &= (-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k} \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right] = (-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right] \\ &= (-2i)^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right] = (-2i^2)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

d) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on retombe sur la question précédente. On suppose par la suite $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$e^{-2i\theta} - \omega_k = e^{-2i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} \left(e^{-i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} - e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} \right) = -2i \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)}.$$

En spécifiant en $X = e^{-2i\theta}$ dans la factorisation de $P(X) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$, il vient d'une part

$$\begin{aligned} P(e^{-2i\theta}) &= \prod_{k=1}^{n-1} \left[e^{-2i\theta} - \omega_k \right] = \prod_{k=1}^{n-1} \left[-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} \right] = (-2ie^{-i\theta})^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left[e^{\frac{ik\pi}{n}} \right] \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) \right] \\ &= (2e^{-i\theta})^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, on a $e^{-2i\theta} \neq 1$ et

$$P(e^{-2i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-2i\theta})^k = \frac{1-(e^{-2i\theta})^n}{1-e^{-2i\theta}} = \frac{e^{-in\theta)}}{e^{-i\theta}} \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} = e^{-i(n-1)\theta} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Par conséquent, on a $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.