CHAPITRE XXII : DÉNOMBREMENT

Correction

a) Méthode 1 : Soit n un entier naturel non nul fixé. Notons $\mathcal{P}(p)$ la propriété

$$\mathcal{P}(p) \quad : \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+p}{p}.$$

$\diamond$ La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée car

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n-0-1}{0} = \binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{0} = \binom{n+0}{0}.$$

$\diamond$ Supposons la propriété $\mathcal{P}(p)$ établie pour un certain $p \geqslant 0$ fixé. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p+1} \binom{n+k-1}{k} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+p}{p+1} \\ &= \binom{n+p}{p} + \binom{n+p}{p+1} \text{ par hypothèse de récurrence,} \\ &= \binom{n+p+1}{p+1} \text{ grâce à la formule du triangle de Pascal.}\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(p+1)$ se retrouve vérifiée ce qui achève la récurrence.
$\diamond$ Par conséquent, la propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier p positif.
Méthode 2 : La formule du triangle de Pascal donne, pour $k \geqslant 1$:

$$\binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k} \Leftrightarrow \binom{n+k-1}{k} = \underbrace{\binom{n+k}{k}}_{=a_k} - \underbrace{\binom{n+k-1}{k-1}}_{=a_{k-1}}$$

On peut alors faire apparaitre une somme télescopique en écrivant

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{p} \binom{n+k-1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{p} (a_k - a_{k-1}) = 1 + a_p - a_0 = a_p = \binom{n+p}{p}.$$

b) $\diamond$ La seule manière d'écrire 0 comme somme de n termes entiers positifs est

$$0 = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n \text{ termes}}.$$

Donc $S_n^0 = 1$.
$\diamond$ Pour écrire 1 comme somme de n termes entiers positifs, il faut ajouter 1 une fois et $n-1$ fois zéro. Il suffit juste de choisir l'emplacement du nombre 1 pour lequel nous avons n choix possibles. Donc

$$S_n^1 = n.$$

$$1 = 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ termes}} = 0 + 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-2 \text{ termes}} = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{k \text{ termes}} + 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-k-1 \text{ termes}} = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ termes}} + 1.$$

$\diamond$ Pour écrire 2 comme somme de n entiers positifs, il faut soit ajouter une fois 2 et $n-1$ fois zéro, soit ajouter deux fois 1 et $n-2$ fois zéro. Dans le premier cas, il y a n manières de faire

$$2 = 2 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ termes}} = 0 + 2 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-2 \text{ termes}} = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{k \text{ termes}} + 2 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-k-1 \text{ termes}} = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ termes}} + 2$$

qui correspondent aux différents choix possibles pour l'emplacement du nombre 2 dans la somme. Dans le second cas, il faut choisir 2 emplacements pour les 1 parmi les n emplacements possibles. Il y a donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ façons d'écrire 2 de la sorte. Donc

$$S_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\diamond$ La seule manière d'écrire un entier p comme somme d'un entier positif est $p = p$. Donc $S_1^p = 1$.
$\diamond$ Il y autant de manières d'écrire un entier positif p comme somme de deux entiers positifs qu'il y a d'entiers positifs inférieurs à p. En effet

$$p = 0 + p = 1 + (p-1) = 2 + (p-2) = \cdots = \underbrace{k + (p-k)}_{0 \leqslant k \leqslant p} = \cdots = (p-1) + 1 = p + 0.$$

Donc $S_2^p = p + 1$.

c) Lorsque l'on écrit $p = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}$ avec x_i entier positif, l'entier x_{n+1} peut prendre n'importe quelle valeur k entre 0 et p. Dès lors

$$\{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) :\ x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = p\} = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant p} \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) :\ x_{n+1} = k \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = p - k\}$$

et l'union est disjointe. Dès lors

$$\begin{aligned} S_{n+1}^p &= \sum_{k=0}^{p} \operatorname{card}\{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} :\ x_{n+1} = k \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = p - k\} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \operatorname{card}\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n :\ \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = p - k\} \\ &= \sum_{k=0}^{p} S_n^{p-k} = \sum_{j=0}^{p} S_n^j = S_n^0 + S_n^1 + \cdots + S_n^p.. \end{aligned}$$

d) Notons $\mathcal{A}_n$ l'assertion suivante :

$$\mathcal{A}_n \quad : \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \ S_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Montrons que l'assertion $\mathcal{A}_n$ est vérifiée pour tout entier $n > 0$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
$\diamond$ Pour $n = 1$, on a déterminer dans la deuxième question

$$S_1^p = 1 = \binom{p}{p} = \binom{1+p-1}{p}.$$

Donc la propriété $\mathcal{A}_1$ étudiée est vraie.
◇ Admettons l'assertion $\mathcal{A}_n$ vérifiée pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Grâce à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} S_{n+1}^p &= S_n^0 + S_n^1 + \cdots + S_n^p \\ &= \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+p-1}{p} \text{ par hypothèse de récurrence,} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} \\ &= \binom{n+p}{p} \text{ grâce à la première question,} \\ &= \binom{n+1+p-1}{p}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1}^p = \binom{n+1+p-1}{p}$ ce qui prouve l'hérédité de la propriété $\mathcal{A}_n$ et achève la récurrence.