CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

a) On montre tout d'abord que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, ie un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q) - (\lambda P+\mu Q)' = \lambda(P-P') + \mu(Q-Q') = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$
Donc f est une application linéaire.
De plus, on a $\deg(P) \leqslant n$ donc $\deg(f(P)) = \deg(P-P') \leqslant \max\{\underbrace{\deg(P)}_{\leqslant n}, \underbrace{\deg(P')}_{\leqslant n-1}\} \leqslant n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On montre que f est en plus bijective, donc que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P' = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k$. Il vient
$$\begin{aligned} P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P - P' = 0 &\Leftrightarrow a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1})X^k = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ \forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0. \end{aligned}$$
Donc f est injective, donc bijective puisque f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie.

b) Méthode 1 : La fonction f étant bijective, pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, on détermine l'unique antécédent P de X^i. En effet, l'application f^{-1} étant linéaire, elle est entièrement déterminée par l'image d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On note $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. On obtient ainsi
$$f(P) = X^i \Leftrightarrow P - P' = X^i \Leftrightarrow a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1})X^k = X^i.$$
Si $i = n$, on a alors
$$\begin{aligned} f(P) = X^n &\Leftrightarrow a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1})X^k = X^n \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ \forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ \forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad a_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} a_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = \frac{n!}{k!} \Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k. \end{aligned}$$

Si $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors

$$f(P) = X^i \Leftrightarrow a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1}) X^k = X^i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!] \text{ avec } k \neq i, \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \\ a_i - (i+1)a_{i+1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k > i, \quad a_k = 0 \\ a_i = 1 \\ \forall k < i, \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![i+1, n]\!], \quad a_k = 0 \\ \forall k \in [\![0, i]\!], \quad a_k = \frac{i!}{k!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{k!} X^k$$

Par conséquent, f^{-1} est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad f^{-1}(X^i) = \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{k!} X^k.$$

On remarque, que sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, f^{-1} coïncide avec $P \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$ donc, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a aussi :

$$f^{-1}(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$$

On peut vérifier, sachant $P^{(n+1)} = 0$ car $\deg P \leqslant n$, que

$$f(f^{-1}(P)) = \sum_{k=0}^{n} f(P^{(k)}) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - P^{(k+1)} = P^{(0)} - P^{(n+1)} = P.$$

Méthode 2 : En notant $D : P \mapsto P'$ l'opérateur de dérivation, dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, on a $D^{n+1} = 0$ donc

$$I = I - D^{n+1} = (I - D) \sum_{k=0}^{n} D^k = f \sum_{k=0}^{n} D^k.$$

On a de même $I = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} D^k \right) f$ donc f est bijective et $f^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} D^k$.