CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ

Correction

a) La fonction f est supposée non constante donc il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ tel que $f(a)\neq f(b)$. On utilise le fait que la courbe représentative de f soit au dessus de sa sécante passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ en dehors de $[a,b]$, ie

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash[a,b],\quad f(x)\geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

- Si $f(b)>f(a)$ alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)=+\infty.$$

  Par comparaison, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- Si $f(b)<f(a)$ alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)=+\infty.$$

  Par comparaison, il vient $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On montre que $f(x)\geqslant f(a)$.

- 1er cas : Si $x>a$. Puisque f atteint un minimum local en a, il existe $\alpha\in]a,x[$ tel que $f(a)\leqslant f(\alpha)$. Par croissance de la fonction $t\mapsto\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}\geqslant 0$$

  ce qui donne $f(x)\geqslant f(a)$.

- 2ème cas : Si $x<a$. Puisque f atteint un minimum local en a, il existe $\alpha\in]x,a[$ tel que $f(a)\leqslant f(\alpha)$. Par croissance de la fonction $t\mapsto\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}\leqslant 0$$

  ce qui donne également $f(x)\geqslant f(a)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a prouvé $f(x)\geqslant f(a)$. Ainsi, la fonction f admet un minimum global en a.

c) Il existe $r>0$ tel que, pour tout $x\in[a-r,a+r]$, on ait $f(x)\leqslant f(a)$. Par croissance de la fonction $t\mapsto\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$, pour tout $x\in[a-r,a+r]$, on a

$$0\leqslant\frac{f(a)-f(a-r)}{r}\leqslant\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\frac{f(a+r)-f(a)}{r}\leqslant 0.$$

On obtient $f(x)=f(a)$ et la fonction f se retrouve être constante sur $[a-r,a+r]$.