CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES
Correction

1. a) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -8 \\ -4 & 5 & -4 \\ 4 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ -4 & 8 & -4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} - 3I_3 = -3I_3 + 4A.$

   b) La relation précédente se réécrit $A \times \frac{1}{3}(4I_3 - A) = I_3 = \frac{1}{3}(4I_3 - A) \times A$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(4I_3 - A)$.

2. a) Si X est solution de (E) alors $AX + XA = I_3$. En multipliant par A à gauche ou à droite les différents termes de cette relation, il vient

$$A^2X + AXA = A \quad \text{et} \quad AXA + XA^2 = A.$$

   Ainsi, on peut écrire $A^2X = A - AXA = XA^2$, ie les matrices A^2 et X commutent.

   b) ⋄ En utilisant le résultat de la question 1a), on écrit alors

$$AX = \frac{1}{4}(A^2 + 3I_3)X = \frac{1}{4}(A^2X + 3X) = \frac{1}{4}(XA^2 + 3X) = X \times \frac{1}{4}(A^2 + 3I_3) = XA.$$

   Les matrices A et X commutent.
   ⋄ Si X est solution de (E) alors X et A commutent de telle sorte que (E) se réécrit $2XA = I_3$. Par unicité de l'inverse de A, on obtient $2X = A^{-1}$, ie $X = \frac{1}{2}A^{-1}$. Cette matrice $\frac{1}{2}A^{-1}$ est par ailleurs bien solution de (E). Par conséquent, l'équation (E) possède une unique solution donnée par $X = \frac{1}{2}A^{-1} = \frac{1}{6}(4I_3 - A)$.