CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES
Correction

a) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\diamond$ Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, le terme sur la ligne i et colonne i de $\lambda A + \mu B$ est donné par

$$[\lambda A + \mu B]_{i,i} = \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}.$$

Par linéarité de la somme, il vient

$$tr(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda A + \mu B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda tr(A) + \mu tr(B).$$

$\diamond$ Notons $AB = (c_{i,j})$ et $BA = (d_{i,j})$. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{et} \quad d_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\ \text{et} \quad tr(BA) &= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k}. \end{aligned}$$

Quitte à renommer les indices de sommation dans la dernière expression de $tr(BA)$, on obtient exactement

$$tr(AB) = tr(BA).$$

b) S'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XA = I_n$, en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$n = tr(I_n) = tr(AX - XA) = tr(AX) - tr(XA) = tr(AX) - tr(AX) = 0.$$

Par conséquent, l'équation $AX - XA = I_n$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.