CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES

Correction

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) u_n + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) v_n = \frac{1}{12}(v_n - u_n)$$
$$= \frac{1}{12} w_n.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} w_1 = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3} w_n = \frac{2}{3 \times 12^{n-2}} \geqslant 0 \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4} w_n = -\frac{1}{4 \times 12^{n-2}} \leqslant 0, \\ \text{et } v_n - u_n &= w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $(v_n - u_n)$ tend vers 0. Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En tant que telles, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même limite que l'on note ℓ.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x_{n+1} = 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 8\frac{u_n + 3v_n}{4} + 3\frac{u_n + 2v_n}{3} = 3u_n + 8v_n = x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $x_1 = 8v_1 + 3u_1 = 99$. D'une part, en tant que suite constante, la suite (x_n) converge vers 99. D'autre part, en tant que combinaison linéaire des suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers ℓ, on $x_n = 8v_n + 3u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8\ell + 3\ell = 11\ell$. Par unicité de la limite de la suite (x_n), il vient

$$11\ell = 99 \Leftrightarrow \ell = 9.$$

Par conséquent, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.