CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE
Correction

Soient a et b deux entiers.

a) On suppose a et b premiers entre eux. On commence par montrer $(a+b)\wedge a=1$ et $(a+b)\wedge b=1$. Soit d un diviseur commun positif de a et $a+b$. On a $d|a$ et $d|(a+b)$ donc $d|(a+b-a)$, ie $d|b$. Puisque $a\wedge b=1$, on obtient $d=1$. Par conséquent, $a+b$ et a sont premiers entre eux. De la même manière, on montre que $a+b$ et b sont premiers entre eux.
Grâce au théorème de Bézout, il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ et $(u',v')\in\mathbb{Z}^2$ tels que

$$(a+b)u+av=1 \quad \text{et } (a+b)u'+bv'=1.$$

On en déduit

$$1=[(a+b)u+av][(a+b)u'+bv']=(a+b)\underbrace{[(a+b)uu'+buv'+avu']}_{\in\mathbb{Z}}+ab\underbrace{vv'}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Grâce au théorème de Bézout, les entiers $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

b) On note $d=a\wedge b$. Il existe des entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a=da'$ et $b=db'$. On a $PPCM(a,b)=PPCM(da',db')=dPPCM(a',b')=da'b'$ puisque a' et b' sont premiers entre eux. On peut alors écrire

$$PGCD(a+b,PPCM(a,b))=PGCD(d(a'+b'),da'b')=dPGCD(a'+b',a'b')=d$$

grâce à la question précédente. Par conséquent, on a $(a+b)\wedge(a\vee b)=a\wedge b$.