CHAPITRE XXV : MATRICES

Correction

a) $\diamond$ Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Comme λ_1 et λ_2 sont réels, on a $\overline{\lambda_1} = \lambda_1$ et $\overline{\lambda_2} = \lambda_2$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) &= i(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + (1-i)\overline{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)} = i(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + (1-i)(\lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2}) \\ &= \lambda_1(iz_1 + (1-i)\overline{z_1}) + \lambda_2(iz_2 + (1-i)\overline{z_2}) = \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.
$\diamond$ On montre que f est bijective.
Méthode 1 : On a $f(1) = 1$ et $f(i) = -2 - i$. La famille $(f(1), f(i))$ est libre, de cardinal 2 égal à $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, donc c'est une base de $\mathbb{C}$. L'image d'une base de $\mathbb{C}$ par f est une base de $\mathbb{C}$ donc f est bijective.
Méthode 2 : Soit $z \in \ker f$, ie $f(z) = 0$. On a ainsi $f(z) = 0$ ce qui donne $iz = (i-1)\overline{z}$. Il vient $|z| = |i-1||\overline{z}| = \sqrt{2}|z|$ de quoi l'on tire $|z| = 0$ puis $z = 0$. L'inclusion $\{0\} \subset \ker f$ étant toujours vraie, on a $\ker f = \{0\}$ donc f est injective. Comme par ailleurs f est un endomorphisme en dimension finie, l'injectivité implique la bijectivité. Par conséquent, f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

b) Analyse : Si une telle base (e_1, e_2) existe, ses vecteurs vérifient $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = -e_2$. Le système obtenu donne :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ie_1 + (1-i)\overline{e_1} = e_1 \\ ie_2 + (1-i)\overline{e_2} = -e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)(\overline{e_1} - e_1) = 0 \\ i(e_2 - \overline{e_2}) = -(e_2 + \overline{e_2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{e_1} = e_1 \\ 2i^2 \mathrm{Im}(e_2) = -2\mathrm{Re}(e_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}(e_2) = \mathrm{Re}(e_2) \end{cases}.$$

Il n'y a pas unicité de e_1 et e_2.
Synthèse : On pose $e_1 = 1$ (qui vérifie bien $e_1 \in \mathbb{R}$) et $e_2 = 1 + i$ (qui vérifie bien $\mathrm{Im}(e_2) = \mathrm{Re}(e_2)$). Les vecteurs 1 et $1 + i$ ne sont pas colinéaires dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ donc la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ forme une base du $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 qu'est $\mathbb{C}$. On a

$$f(e_1) = f(1) = 1 = e_1 \quad \text{et } f(e_2) = i(1+i) + (1-i)(1-i) = -(1+i) = -e_2$$

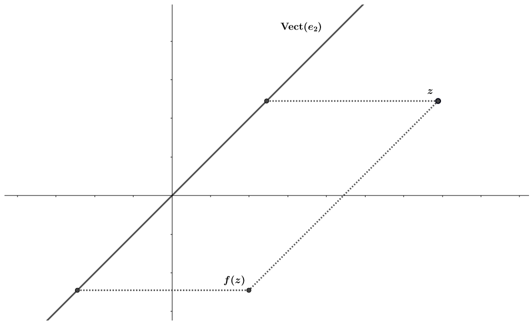
donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe des réels a et b tels que $z = ae_1 + be_2 = a + b(1+i)$. Dans la base $\mathcal{B} = (1, 1+i)$, on a

$$\begin{matrix} | \\ f(z) \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \\ z \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

donc $f(a) = ae_1 - be_2$, ie f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathbb{R}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2) = \mathrm{Vect}(1+i)$.


Vect(e_2)
z
$f(z)$