CHAPITRE XXV : MATRICES

Correction

1. a) On définit les vecteurs $\varepsilon_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$ et $\varepsilon_3 = -e_1 + e_2 - 2e_3$. On vérifie que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, cette famille est de cardinal 3, égal à $\dim \mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, on a

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

En utilisant la linéarité de u et en interprétant les colonnes de A, on a

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= u(e_1) - 2u(e_2) + 2u(e_3) \\ &= 16e_1 - 18e_2 + 30e_3 - 2(4e_1 - 4e_2 + 8e_3) + 2(-4e_1 + 5e_2 - 7e_3) = 0, \\ u(\varepsilon_2) &= u(e_2) + u(e_3) = (4e_1 - 4e_2 + 8e_3) + (-4e_1 + 5e_2 - 7e_3) \\ &= e_2 + e_3 = \varepsilon_2 \\ \text{et } u(\varepsilon_3) &= -u(e_1) + u(e_2) - 2u(e_3) \\ &= -(16e_1 - 18e_2 + 30e_3) + (4e_1 - 4e_2 + 8e_3) - 2(-4e_1 + 5e_2 - 7e_3) \\ &= -4e_1 + 4e_2 - 8e_3 = 4\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u(\varepsilon_1) & u(\varepsilon_2) & u(\varepsilon_3) \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

b) Méthode 1 : Les matrices de passages sont inversibles donc $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ l'est et $P^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.
Méthode 2 : On a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ qui est un isomorphisme donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = P$ est inversible et on a $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

c) Méthode 1 : Par les formules de changement de bases, on a

$$P^{-1}AP = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(u) = D.$$

Méthode 2 : En revenant à la composition d'applications linéaires (ie en redémontrant la formule de changement de bases), on a

$$P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(u) = D.$$

d) Soit $\Delta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta D = D\Delta &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = d = 4c = 4g = 0 \\ 4f = f \\ h = 4h \end{cases} \qquad \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a donc $\Delta D = D\Delta$ si et seulement si Δ est une matrice diagonale.

2. a) En utilisant la définition de Y et le fait que $X^2 = A$, il vient

$$Y^2 = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) = P^{-1}XPP^{-1}XP = P^{-1}X^2P = P^{-1}AP = D \text{ grâce à 1}c).$$

Il s'ensuit

$$YD = YY^2 = Y^3 = Y^2Y = DY.$$

Comme Y et D commutent, on déduit de la question 1d) que Y est une matrice diagonale, ie

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, Y vérifie $Y^2 = D$ donc

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = Y^2 = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \in \{-1, 1\} \\ c \in \{-2, 2\} \end{cases}.$$

En posant $\lambda = b$ et $\mu = c/2$, on a trouvé $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $\mu \in \{-1, 1\}$ tels que

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}.$$

b) On a établi que si X est solution de l'équation (E) alors X est de la forme PYP^{-1} avec Y de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \{-1, 1\} \text{ et } \mu \in \{-1, 1\}.$$

Réciproquement, si X est de la forme ci-dessus, alors

$$X^2 = (PYP^{-1})(PYP^{-1}) = PY^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

donc X est solution de l'équation (E).
Par conséquent, en notant

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

les solutions de l'équation (E) sont les matrices PY_1P^{-1}, PY_2P^{-1}, PY_3P^{-1}, PY_4P^{-1}.

c) Jusqu'à présent, il n'est pas prouvé que les matrices PY_1P^{-1}, PY_2P^{-1}, PY_3P^{-1} et PY_4P^{-1} sont distinctes. Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, on note $X_i = PY_iP^{-1}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$. En multipliant par P et P^{-1}, on a

$$X_i = X_j \Leftrightarrow PY_iP^{-1} = PY_jP^{-1} \Leftrightarrow Y_i = Y_j$$

Donc, si $i \neq j$, on a $X_i \neq X_j$. Par conséquent, l'équation (E) possède quatre solutions X_1, X_2, X_3 et X_4. On a

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = P(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)P^{-1} = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$$

et

$$\begin{aligned} X_1X_2X_3X_4 &= (PY_1P^{-1})(PY_2P^{-1})(PY_3P^{-1})(PY_4P^{-1}) = P(Y_1Y_2Y_3Y_4)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} = A^2. \end{aligned}$$