CHAPITRE XXV : MATRICES
Correction

a) Soit $u \in \mathbb{R}^4$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow \underset{|\mathcal{B}}{\overset{|}{f(u)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2z+t \\ 2x+3y+z+t \\ -x+2y-5z-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+t=0 \\ 2x+3y+z+t=0 \\ -x+2y-5z-3t=0 \end{cases}$$

Ce dernier système forme un système d'équations de $\ker(f)$. En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, ce système d'équation est équivalent à

$$\begin{cases} x+2z+t=0 \\ 2x+3y+z+t=0 \\ -x+2y-5z-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+t=0 \\ 0+3y-3z-t=0 \\ 0+2y-3z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+t=0 \\ 3y-3z-t=0 \\ -3z-4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3}t \\ y=-t \\ z=-\frac{4}{3}t \end{cases}$$

Il s'ensuit

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad \underset{|\mathcal{B}}{\overset{|}{u}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}t \\ -t \\ -\frac{4}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(w) \text{ où } \underset{|\mathcal{B}}{\overset{|}{w}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur w étant non nul, la famille (w) forme une base de $\ker(f)$.

b) On vient d'établir dans la question précédente $\dim\ker(f) = 1$. Grâce au théorème du rang, on obtient immédiatement

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\mathbb{R}^4 - \dim\ker(f) = 4 - 1 = 3.$$

On note v_1, v_2, v_3, v_4 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont données par les colonnes de A. On a $v_4 = -\frac{5}{3}v_1 + v_2 + \frac{4}{3}v_3$ donc $v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Il s'ensuit

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension 3 : c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.