CHAPITRE XXV : MATRICES

Correction

a) Par définition de A, la première (resp. deuxième) colonne de A est constituée des coordonnées de $u(e_1)$ (resp. $u(e_2)$) dans la base $\mathcal{F}$. On a ainsi

$$u(e_1) = 2f_1 + 3f_2 \quad \text{et } u(e_2) = f_1 - f_2 + 2f_3.$$

b) On a $\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} e_1 = e'_1 \\ e_2 = e'_2 - e'_1 \end{cases}$. Ainsi, la famille (e_1, e_2) étant une famille génératrice de E, on déduit que la famille (e'_1, e'_2) est une famille génératrice de E. De plus comme $\dim E = \mathrm{card}(\mathcal{E}) = 2$, la famille $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ est une famille génératrice de E possédant autant d'éléments que la dimension de E, c'est une base de E.
On a $\begin{cases} f'_1 = f_1 + f_2 \\ f'_2 = f_1 + f_3 \\ f'_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(f'_1 + f'_2 - f'_3) \\ f_2 = \frac{1}{2}(f'_1 - f'_2 + f'_3) \\ f'_3 = \frac{1}{2}(-f'_1 + f'_2 + f'_3) \end{cases}$. Ainsi, la famille (f_1, f_2, f_3) étant une famille génératrice de F, on déduit que la famille (f'_1, f'_2, f'_3) est une famille génératrice de F. De plus comme $\dim F = \mathrm{card}(\mathcal{F}) = 3$, la famille $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ est une famille génératrice de F possédant autant d'éléments que la dimension de F, c'est une base de F.

c) On a

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}' \leftarrow \mathcal{E}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}' \leftarrow \mathcal{F}}(\mathrm{id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}(\mathrm{id}_E).$$

Par ailleurs,

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} | & | \\ e'_1 & e'_2 \\ |_{\mathcal{E}} & |_{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}' \leftarrow \mathcal{F}}(id_F) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ |_{\mathcal{F}'} & |_{\mathcal{F}'} & |_{\mathcal{F}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient

$$A' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$