CHAPITRE XXV : MATRICES
Correction

a) On note $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. De même, on note $\mathcal{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$f(e_1) = (1,-2) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C}_2 \text{ sont } \underset{|\mathcal{C}_2}{\overset{|}{f(e_1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$f(e_2) = (1,1) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C}_2 \text{ sont } \underset{|\mathcal{C}_2}{\overset{|}{f(e_2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad f(e_3) = (0,1) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C}_2 \text{ sont } \underset{|\mathcal{C}_2}{\overset{|}{f(e_3)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On a

$$g(e_1) = (0,1,1) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \underset{|\mathcal{C}_2}{\overset{|}{g(e_1)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g(e_2) = (1,0,1) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \underset{|\mathcal{C}_2}{\overset{|}{g(e_2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad g(e_3) = (1,1,0) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \underset{|\mathcal{C}_2}{\overset{|}{g(e_3)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$h(1) = 1 \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ sont } \underset{|\mathcal{B}}{\overset{|}{h(1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h(X) = X + 1 \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{B}}{h(X)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h(X^2) = X^2 + 2X + 1 \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{B}}{h(X^2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad h(X^3) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{B}}{h(X^3)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$i(1) = (1,1,1,1) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{C}}{i(1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$i(X) = (1,2,3,4) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{C}}{i(X)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$i(X^2) = (1,4,9,16) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{C}}{i(X^2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad i(X^3) = (1,8,27,64) \text{ dont les coordonnées dans } \mathcal{C} \text{ sont } \overset{|}{\underset{|\mathcal{C}}{i(X^3)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}.$$