CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES
Correction

On factorise $X^{2n}-1$ sous la forme $X^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(X-\omega_k)$ où, pour tout $k\in[\![0,2n-1]\!]$, $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{2n}}=e^{\frac{ik\pi}{n}}$ est une racine $2n$-ième de l'unité.
Tous les pôles de R sont simples donc la fraction rationnelle R se décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$ sous la forme

$$R=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{a_k}{X-\omega_k}\quad\text{avec } a_k\in\mathbb{C}.$$

Soit $k\in[\![0,2n-1]\!]$, on a $(X^{2n}-1)'=2nX^{2n-1}$ donc

$$a_k=\frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}}=\frac{\omega_k}{2n}.$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de R est

$$R=\frac{1}{X^{2n}-1}=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, on va regrouper les racines par paires conjuguées. Les cas $k=0$ et $k=n$ correspondent respectivement à $\omega_k=1$ et $\omega_k=-1$: ce sont les racines réelles de $X^{2n}-1$. Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a

$$\omega_{2n-k}=e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}=e^{-\frac{ik\pi}{n}}=\overline{\omega_k}\text{ avec } 2n-k\in[\![n+1,2n-1]\!].$$

On obtient

$$\begin{aligned}
R&=\frac{1}{2n}\left[\underbrace{\frac{1}{X-1}}_{k=0}+\underbrace{\frac{-1}{X+1}}_{k=n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_{2n-k}}{X-\omega_{2n-k}}\right]\\
&=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\omega_k}{X-\omega_k}+\frac{\overline{\omega_k}}{X-\overline{\omega_k}}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_k(X-\overline{\omega_k})+\overline{\omega_k}(X-\omega_k)}{(X-\omega_k)(X-\overline{\omega_k})}\right]\\
&=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\omega_k+\overline{\omega_k})X-2|\omega_k|^2}{X^2-(\omega_k+\overline{\omega_k})X+|\omega_k|^2}\right]\\
&=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)-2}{X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1}\right]\quad\text{avec } \omega_k+\overline{\omega_k}=2\mathrm{Re}(\omega_k)=2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de R est :

$$R=\frac{\frac{1}{2n}}{X-1}-\frac{\frac{1}{2n}}{X+1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)-1}{X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1}$$