CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION

Correction

a) La fonction g étant continue, la fonction G est dérivable donc continue sur le segment $[a, b]$. Or l'image d'un segment par une fonction continue est un segment donc il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $G([a, b]) = [m, M]$.

b) La fonction G est une primitive de g donc en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)dt \quad \text{car } G(a) = 0.$$

c) La fonction f étant décroissante, pour tout $t \in [a, b]$, la double inégalité $m \leqslant G(t) \leqslant M$ implique $-mf'(t) \leqslant -f'(t)G(t) \leqslant -Mf'(t)$. Par croissance et linéarité de l'intégrale, il s'ensuit

$$m(f(a) - f(b)) = -m \int_a^b f'(t)dt \leqslant - \int_a^b f'(t)G(t)dt \leqslant -M \int_a^b f'(t)dt = M(f(a) - f(b)).$$

En utilisant le résultat de la question b), ie en ajoutant $f(b)G(b)$ dans chacun des membres de la relation précédente, on obtient

$$mf(a) + f(b)\underbrace{(G(b) - m)}_{\geqslant 0} \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant Mf(a) + f(b)\underbrace{(G(b) - M)}_{\leqslant 0}.$$

La fonction f étant positive, en particulier on a $f(b) \geqslant 0$, la double inégalité précédente donne

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant Mf(a).$$

Si $f(a) = 0$, alors on obtient $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ et la relation demandée est vraie pour tout réel $c \in [a, b]$.
Si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt \in [m, M] = G([a, b])$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt = G(c) \Leftrightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt.$$