CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION

Correction

a) En posant $\begin{cases} U(t) = \frac{(t-a)(t-b)}{2} \\ V'(t) = f''(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(t) = t - \frac{a+b}{2} \\ V(t) = f'(t) \end{cases}$, il vient par intégration par parties,

$$\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt = \left[\frac{(t-a)(t-b)}{2} f'(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)dt = -\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)dt.$$

En posant $\begin{cases} U(t) = t - \frac{a+b}{2} \\ V'(t) = f'(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(t) = 1 \\ V(t) = f(t) \end{cases}$, une nouvelle intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt &= -\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)dt = -\left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b + \int_a^b f(t)dt \\ &= -\frac{b-a}{2} f(b) + \frac{a-b}{2} f(a) + \int_a^b f(t)dt.\end{aligned}$$

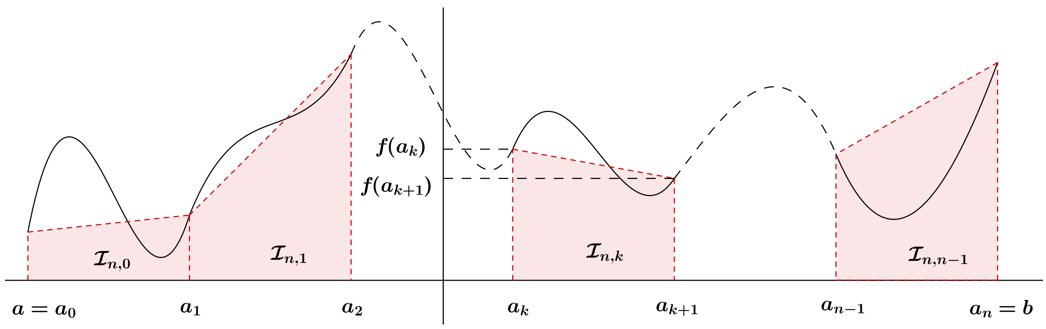
Il s'ensuit

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt.$$

b) En posant $\begin{cases} U(t) = b - t \\ V'(t) = t - a \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(t) = -1 \\ V(t) = \frac{(t-a)^2}{2} \end{cases}$, il vient par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt &= \frac{1}{2}\left[(b-t)\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^b + \frac{1}{4}\int_a^b (t-a)^2 dt = \frac{1}{4}\int_a^b (t-a)^2 dt = \frac{1}{4}\left[\frac{(t-a)^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{(b-a)^3}{12}.\end{aligned}$$

c) Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ et sur chaque intervalle de la forme $[a_k, a_{k+1}]$, on approche l'aire située entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses par l'aire $\mathcal{I}_{n,k}$ du trapèze dont les sommets sont les points de coordonnées $(a_k, 0)$, $(a_k, f(a_k))$, $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$ et $(a_{k+1}, 0)$. La figure ci-dessous représente cette situation.



L'aire située entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses pour $t \in [a_k, a_{k+1}]$ est donnée par $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ alors que l'aire $\mathcal{I}_{n,k}$ du trapèze[1] est égale à $(a_{k+1} - a_k)\dfrac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$.

[1] L'aire d'un trapèze est donnée par hauteur $\times$ $\frac{\text{petite base}+\text{grande base}}{2}$

La formule obtenue lors de la question a) exprime la différence entre ces deux aires. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt = \underbrace{(a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2}}_{=\mathcal{I}_{n,k}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)dt.$$

Dès lors, en appliquant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{I} - \mathcal{I}_n &= \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{I}_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{I}_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \mathcal{I}_{n,k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)dt.\end{aligned}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, la fonction f'' est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée. La quantité M est ainsi un réel fini. Par ailleurs, en appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|\frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)\right| dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|t-a_k| \cdot |t-a_{k+1}|}{2} M dt \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(a_{k+1}-t)}{2} dt \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12} \text{ grâce à la question b)} \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{b-a}{n})^3}{12} = M \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \frac{n}{12} \\ &= \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.\end{aligned}$$