CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION
Correction

a) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)} = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} = \frac{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}.$$

b) On pose $t = \frac{\pi}{4} - x$ de telle sorte que $x = \frac{\pi}{4} - t$.

- Gestion de l'élément différentiel : on a $dt = -dx$.
- Gestion des bornes : pour $t = 0$, on a $x = \frac{\pi}{4}$. Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on a $x = 0$.

On peut alors écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 -\ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) dx \quad \text{grâce à la question précédente,}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2) - \ln(1 + \tan x)\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi \ln 2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, dx$$

de quoi l'on tire $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)dt = \frac{\pi \ln 2}{4}$ puis

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)dt = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$