CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION
Correction

a) Méthode 1 : Pour tout réel t, on a $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ donc

$$\arctan(b) - \arctan(a) = \int_a^b \arctan'(t)dt = \int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \int_a^b 1dt = b-a$$

par croissance de l'intégrale.
Méthode 2 : La fonction arctan étant continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, grâce à la formule des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\arctan(b) - \arctan(a) = (b-a)\arctan'(c) = \frac{b-a}{1+c^2}.$$

On conclut en remarquant que $0 \leqslant \frac{1}{1+c^2} \leqslant 1$.

b) Pour $t \in [0,1[$, on a $t^n \to 0$. On aimerait pouvoir dire $\int_0^1 \arctan(t+t^n)dt \to \int_0^1 \arctan(t)dt$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \arctan(t+t^n) - \arctan(t) \leqslant (t+t^n) - t = t^n$$

donc

$$0 \leqslant \int_0^1 \arctan(t+t^n) - \arctan(t)dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Par conséquent, il vient

$$\int_0^1 \arctan(t+t^n)dt = \int_0^1 \arctan(t+t^n) - \arctan(t)dt + \int_0^1 \arctan(t)dt \to \int_0^1 \arctan(t)dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Cette dernière intégrale se calculant par intégration par parties.