CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION

Correction

a) En posant $u = \ln x$, on a $du = \frac{1}{x}dx$ donc

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \int_0^1 u^n du = \left[\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

b) En posant $t = e^x$, on a $dt = e^x dx$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)}dt = \int_1^e \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}dt = [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^e$$
$$= 1 - \ln(1+e) + \ln(2) = \ln(e) - \ln(1+e) + \ln(2) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right).$$

On pouvait aussi remarquer

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \left[-\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1 = \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e}}\right).$$

c) En posant $u = \cos(x)$, on a $du = -\sin(x)dx$ donc

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)+\sin(2x)}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)(1+2\cos(x))}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)(1+2\cos(x))}dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(1-\cos^2(x))(1+2\cos(x))}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-1}{(1-u^2)(1+2u)}du$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)}du$$

Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{1+2u}$$

que l'on détermine en appliquant la méthode du cache. Pour tout $u \in \mathbb{R}\backslash\{-1/2,-1\}$, on a

$$\frac{1}{(1+u)(1+2u)} = a + \frac{b(1-u)}{1+u} + \frac{c(1-u)}{1+2u}.$$

En particulier, pour $a = 1$, on obtient $a = \frac{1}{6}$. On détermine de la même manière $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{4}{3}$. Il s'ensuit

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)+\sin(2x)}dx = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u}du - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+u}du + \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+2u}du$$
$$= \frac{1}{6}\left[-\ln(1-u)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+u)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\ln(1+2u)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\ln(2) = \frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3).$$