CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION

Correction

a) On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\pi x) \end{array} \right.$ qui est continue sur $[0,1]$. On reconnait alors une somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

On pouvait aussi considérer la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ qui est continue sur $[0,\pi]$. On reconnait alors une somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\pi\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

b) On considère la fonction $h : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\alpha+x} \end{array} \right.$ qui est continue sur $[0,1]$. On reconnait alors une somme de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n\alpha+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\alpha+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+t}dt = \left[\ln(\alpha+t)\right]_0^1.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+k} = \ln(1+\alpha)-\ln(\alpha) = \ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

On pouvait tout aussi bien considérer $\left\{ \begin{array}{ccc} [0,\alpha] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ pour aboutir au même résultat.

c) On considère $f \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$ qui est continue sur $[0,1]$. On reconnait alors une somme de Riemann

$$\ln(c_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \ln(1+t)dt = \left[(t+1)\ln(t+1)-t\right]_0^1.$$

Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(c_n) = 2\ln(2)-1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln c_n} = e^{2\ln(2)-1} = \dfrac{4}{e}$.