CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION

Correction

a) On effectue le changement de variable $x = a + b - t$ dans $\int_a^b xf(x)dx$. On a $dx = -dt$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)dt \\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt \text{ car } \forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x) \\ &= (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt \text{ par linéarité de l'intégrale.}\end{aligned}$$

Il s'ensuit $2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx$ d'où

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

b) On considère la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \end{array}\right.$ (ici $a = 0$ et $b = \pi$). Pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{1+(-\cos(x))^2} = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = f(x).$$

La fonction f introduite vérifie ainsi les hypothèses de la question précédente. Par conséquent, en appliquant le résultat précédent, on obtient

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \frac{\pi}{2}\left[-\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi = \pi\arctan(1) = \frac{\pi^2}{4}.$$