CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION
Correction

a) On a déjà

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

À l'aide d'une intégration par parties, en posant $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = e^x \end{cases}$, on calcule

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1.$$

À l'aide d'une intégration par parties, en posant $\begin{cases} U(x) = x^2 \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(x) = 2x \\ V(x) = e^x \end{cases}$, on calcule

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2.$$

À l'aide d'une intégration par parties, en posant $\begin{cases} U(x) = x^3 \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(x) = 3x^2 \\ V(x) = e^x \end{cases}$, on calcule

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = [x^3 e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx = e - 3\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 3(e-2) = 6 - 2e.$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x^3 + 3x^2 - x + 1)e^x dx &= 2\int_0^1 x^3 e^x dx + 3\int_0^1 x^2 e^x dx - \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 e^x dx \\ &= 2(6-2e) + 3(e-2) - 1 + (e-1) = 4.\end{aligned}$$

b) En posant $\begin{cases} U(x) = \arctan(x) \\ V'(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ V(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan(x)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\left[x - \arctan(x)\right]_0^1 = \arctan(1) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) En posant $\begin{cases} U(t) = (t-\alpha)^n \\ V'(t) = (t-\beta)^n \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(t) = n(t-\alpha)^{n-1} \\ V(t) = \frac{1}{n+1}(t-\beta)^{n+1} \end{cases}$, on calcule

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n dt &= \left[\frac{1}{n+1}(t-\alpha)^n (t-\beta)^{n+1}\right]_\alpha^\beta - \frac{n}{n+1}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-1}(t-\beta)^{n+1}dt \\ &= -\frac{n}{n+1}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-1}(t-\beta)^{n+1}dt.\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} U(t) = (t-\alpha)^{n-1} \\ V'(t) = (t-\beta)^{n+1} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(t) = (n-1)(t-\alpha)^{n-2} \\ V(t) = \frac{1}{n+2}(t-\beta)^{n+2} \end{cases}$, on calcule

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-1}(t-\beta)^{n+1}dt &= \left[\frac{1}{n+2}(t-\alpha)^{n-1}(t-\beta)^{n+2}\right]_\alpha^\beta - \frac{n-1}{n+2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-2}(t-\beta)^{n+2}dt \\
&= -\frac{n-1}{n+2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-2}(t-\beta)^{n+2}dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n dt = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-2}(t-\beta)^{n+2}dt.$$

Ces premières intégrations par parties suggèrent que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n dt = (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)\cdots(n+k)}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{n-k}(t-\beta)^{n+k}dt.$$

Cette formule se prouve par récurrence sur $k \in [\![0,n]\!]$. La récurrence est laissée au lecteur. Cette formule donne en particulier pour $k = n$,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n dt &= (-1)^n \frac{n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1}{(n+1)\times\cdots\times(n+n)}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^0(t-\beta)^{2n}dt \\
&= (-1)^n \frac{(1\times\cdots\times n)^2}{1\times 2\times\cdots\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n)}\int_\alpha^\beta (t-\beta)^{2n}dt \\
&= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[\frac{1}{2n+1}(t-\beta)^{2n+1}\right]_\alpha^\beta \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{2n+1}(\alpha-\beta)^{2n+1} \\
&= (-1)^n \frac{(\beta-\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$