CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES

Correction

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que la famille $(A^k B^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
⋄ Pour $n = 0$, la famille (1) est libre.
⋄ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $(A^k B^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre. On montre que $(A^k B^{n+1-k})_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+2}$ tel que

$$\lambda_0 B^{n+1} + \lambda_1 A B^n + \cdots + \lambda_n A^n B + \lambda_{n+1} A^{n+1} = 0.$$

On écrit

$$\lambda_0 B^{n+1} = -A(\lambda_1 B^n + \cdots + \lambda_n A^{n-1} B + \lambda_{n+1} A^n. \tag{1}$$

Si $\lambda_1 B^n + \cdots + \lambda_n A^{n-1} B + \lambda_{n+1} A^n \neq 0$ et $\lambda_0 \neq 0$ alors A divise B^{n+1} ce qui est impossible puisque $A \wedge B = 1$ (donc $A \wedge B^{n+1} = 1$). La relation (1) montre alors $\lambda_0 = 0$ et

$$\lambda_1 B^n + \cdots + \lambda_n A^{n-1} B + \lambda_{n+1} A^n = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, la famille $(A^k B^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$ et $\lambda_0 = 0$. Par conséquent, la famille $(A^k B^{n+1-k})_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est libre.