CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

$\diamond$ Si $\ker f = \mathrm{Im} f$. Pour tout $x \in E$, on a

$$f^2(x) = f(f(x)) = 0 \text{ car } f(x) \in \mathrm{Im} f = \ker f. \text{ Donc } f^2 = 0.$$

En appliquant le théorème du rang, on a immédiatement

$$n = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f) + \mathrm{rg}(f) = 2\mathrm{rg}(f).$$

$\diamond$ Réciproquement, si $f^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$. Soit $y \in \mathrm{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Dès lors, on peut écrire

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0 \text{ donc } y \in \ker f.$$

Ainsi, on a $\mathrm{Im} f \subset \ker f$. De plus, grâce au théorème du rang, on a

$$2\mathrm{rg}(f) = n = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) \text{ donc } \mathrm{rg}(f) = \dim(\ker f).$$

Ainsi les deux sous-espaces vectoriels de E que sont $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker f$ vérifient $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\ker f)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Im} f = \ker f$.