CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES

Correction

1. On obtient $P_3 = X^2 - 1$, $P_4 = X^3 - 2X = X(X^2 - 2)$ et $P_5 = X^4 - 3X^2 + 1$.

2. On montre par récurrence double que $\deg P_n = n - 1$.
   ⋄ Pour $n = 1$ et $n = 2$, on a bien $\deg P_1 = \deg 1 = 0$ et $\deg P_2 = \deg X = 1$.
   ⋄ On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on ait $\deg(P_n) = n - 1$ et $\deg(P_{n+1}) = n$. On a alors $\deg(XP_{n+1}) = n + 1 \neq \deg(P_n)$ donc
   $$\deg(P_{n+2}) = \deg(XP_{n+1} - P_n) = \deg(XP_{n+1}) = n + 1$$
   ce qui achève la récurrence.

3. a) Soit $\in \mathbb{R}$. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ la relation $\sin(na) = \sin(a)P_n(2\cos a)$.
   ⋄ Pour $n = 1$, on a $\sin(a)P_1(2\cos a) = \sin(a) \times 1 = \sin(1 \times a)$.
   ⋄ Pour $n = 2$, on a $\sin(a)P_2(2\cos a) = 2\sin(a)\cos(a) = \sin(2a)$.
   ⋄ On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on ait $\sin(na) = \sin(a)P_n(2\cos a)$ et $\sin((n+1)a) = \sin(a)P_{n+1}(2\cos a)$. Il vient
   $$\begin{aligned}\sin(a)P_{n+2}(2\cos a) &= \sin(a)[2\cos(a)P_{n+1}(2\cos a) - P_n(2\cos a)]\\ &= 2\cos(a)\sin((n+1)a) - \sin(na) \quad \text{par hypothèse de récurrence,}\\ &= \sin((n+2)a) \quad (\text{car } \sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin u \cos v)\end{aligned}$$
   ce qui achève la récurrence.

   b) Pour tout $a = \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\sin(na) = \sin(k\pi) = 0$ et $\sin a \neq 0$ donc $P_n(2\cos a) = 0$. Les réels $2\cos a = 2\cos\frac{k\pi}{n}$ sont des racines distinctes de P_n donc on vient d'exhiber $n-1$ racines du polynôme P_n. Puisque P_n est de degré $n - 1$, on a toutes les racines de P_n. De plus, comme P_n est unitaire, on peut écrire
   $$P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

4. Pour tout $n \geqslant 2$, on note $Q_n = P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$. On a
   $$Q_{n+1} = P_{n+1}^2 - P_{n+2}P_n = P_{n+1}(XP_n - P_{n-1}) - (XP_{n+1} - P_n)P_n = -P_{n+1}P_{n-1} + P_n^2 = Q_n.$$
   La suite (Q_n) est constante. De plus, on a $Q_2 = P_2^2 - P_3P_1 = 1$ donc :
   $$\forall n \geqslant 2, \quad P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = 1.$$
   Grâce au théorème de Bézout, les polynômes P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux (résultat immédiatement vrai pour $n = 1$ puisque $P_1 = 1$ et $P_2 = X$).

5. Méthode 1 : On montre, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, que :
   $$\forall n \geqslant 2, \quad P_{n+p} = P_nP_{p+1} - P_{n-1}P_p.$$

$\diamond$ Pour $p=1$, puisque $P_1=1$, pour tout $n\geqslant 2$, on a $P_{n+1}=XP_n-P_{n-1}=P_nP_1-P_{n-1}P_1$.
$\diamond$ On suppose que, pour un certain $p\in\mathbb{N}^*$ fixé, on ait : $P_{n+p}=P_nP_{p+1}-P_{n-1}P_p$ pour tout $n\geqslant 2$.
Pour tout $n\geqslant 2$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}P_{n+p+1}=P_{(n+1)+p}&=P_{n+1}P_{p+1}-P_nP_p=(XP_n-P_{n-1})P_{p+1}-P_nP_p\\&=P_n(XP_{p+1}-P_p)-P_{n-1}P_{p+1}=P_nP_{p+2}-P_{n-1}P_{p+1}.\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Méthode 2 : Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}&(\sin a)^2[P_n(2\cos a)P_{p+1}(2\cos a)-P_{n-1}(2\cos a)P_p(2\cos a)]\\&=\sin na\sin(p+1)a-\sin(n-1)a\sin pa\\&=\sin(na)[\sin pa\cos a+\cos pa\sin a]-\sin(pa)[\sin na\cos a-\cos na\sin a]\\&=\sin(a)[\sin na\cos pa+\cos na\sin pa]=\sin a\cos(n+p)a\\&=(\sin a)^2P_{n+p}(2\cos a).\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $a\in]0,\pi[$, on a $\sin a\neq 0$ donc

$$P_n(2\cos a)P_{p+1}(2\cos a)-P_{n-1}(2\cos a)P_p(2\cos a)=P_{n+p}(2\cos a).$$

Ainsi, pour tout $x\in]-2,2[$, on a $P_{n+p}(x)-P_n(x)P_{p+1}(x)+P_{n-1}(x)P_p(x)=0$. Le polynôme $P_{n+p}-P_nP_{p+1}-P_{n-1}P_p$ admettant une infinité de racines, il est nul. On obtient bien

$$P_{n+p}=P_nP_{p+1}-P_{n-1}P_p.$$

6. $\diamond$ Le polynôme $D=P_n\wedge P_p$ est un diviseur commun de P_n et P_p. La relation $P_{n+p}=P_nP_{p+1}-P_{n-1}P_p$ justifie que D divise également P_{n+p}. Ainsi D est un diviseur commun de P_{n+p} et P_p donc $D=P_n\wedge P_p$ divise $P_{n+p}\wedge P_p$.
$\diamond$ Le polynôme $S=P_{n+p}\wedge P_p$ est un diviseur commun de P_{n+p} et P_p. La relation $P_{n+p}+P_{n-1}P_p=P_nP_{p+1}$ justifie que S divise P_nP_{p+1}. Comme S divise P_p qui est premier avec P_{p+1}, on en déduit que S et P_{p+1} sont premiers entre eux. Grâce au lemme de Gauss, S divise P_n.
Le polynôme S divise P_n et P_p donc $S=P_{n+p}\wedge P_p$ divise $P_n\wedge P_p$.
$\diamond$ On a $P_n\wedge P_p$ qui divise $P_{n+p}\wedge P_p$ et $P_{n+p}\wedge P_p$ qui divise $P_n\wedge P_p$ donc ces deux polynômes sont associés. Comme ils sont tous les deux unitaires, il vient $P_{n+p}\wedge P_p=P_n\wedge P_p$.

7. Soient $p\in\mathbb{N}^*$, $p\in\mathbb{N}^*$, $q\in\mathbb{N}$ et $r\in\mathbb{N}$ tels que $n=pq+r$. On note $U_q=P_{pq+r}\wedge P_p$. Grâce à la question précédente, on a

$$U_q=P_{pq+r}\wedge P_p=P_{pq+r-p}\wedge P_p=P_{p(q-1)+r}\wedge P_p=U_{q-1}.$$

La suite (U_q) est donc indépendante de q.

a) Si r est non nul, $U_0=P_r\wedge P_p$ existe et on a $P_n\wedge P_p=U_q=U_0=P_r\wedge P_p$.
b) Si $r=0$, U_0 n'existe pas et mais on a $P_n\wedge P_p=U_q=U_1=P_p\wedge P_p=P_p$ (car P_p est unitaire).

8. Partant de n et de p, on effectue une succession de division euclidienne pour aboutir $n\wedge p$.
On pose $r_0=n$ et $r_1=p$. Pour tout $n\geqslant 2$, on définit $r_n\in\mathbb{N}$ comme étant le reste de la division euclidienne de r_{n-2} par r_{n-1}. L'algorithme d'Euclide assure l'existence d'un entier $N\geqslant 0$ tel que $r_N\neq 0$ et $r_n=0$ pour $n>N$. De plus, le dernier reste non nul r_N est égal à $n\wedge p$. La dernière division euclidienne étant de la forme $r_{N-1}=qr_N+0$.
Grâce aux questions précédentes, on peut alors écrire $P_n\wedge P_p=P_p\wedge P_r$ ce qui se réécrit $P_{r_0}\wedge P_{r_1}=P_{r_1}\wedge P_{r_2}$. Puis, en itérant, il vient

$$P_n\wedge P_p=P_{r_0}\wedge P_{r_1}=P_{r_1}\wedge P_{r_2}=P_{r_2}\wedge P_{r_3}=\cdots=P_{r_{N-1}}\wedge P_{r_N}=P_{r_N}=P_{n\wedge p}.$$