CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES
Correction

a) On commence par décomposer le polynôme en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ avant de regrouper les facteurs conjugués. On a

$$\begin{aligned}
X^4+1 &= \left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{5i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{7i\frac{\pi}{4}}\right)\\
&= \left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\\
&= \left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)\\
&= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).
\end{aligned}$$

Les deux polynômes de degré 2 ont un discriminant strictement négatif, ils ne possèdent pas de racine réelle et sont donc irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En reprenant le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
X^8-1 &= (X^4-1)(X^4+1) = (X^2-1)(X^2+1)(X^4+1) = (X+1)(X-1)(X^2+1)(X^4+1)\\
&= (X+1)(X-1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).
\end{aligned}$$

Les trois polynômes de degré 2 apparaissant ont un discriminant strictement négatif, ils ne possèdent pas de racine réelle et sont donc irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$. Les polynômes de degré 1 sont toujours irréductibles.

c) On commence par décomposer le polynôme en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ avant de regrouper les facteurs conjugués. Pour cela, on remarque

$$\begin{aligned}
(X^2-X+1)^2+1 &= (X^2-X+1)^2-i^2 = (X^2-X+1+i)(X^2-X+1-i)\\
&= (X-i)(X-1+i)(X+i)(X-1-i)\\
&= (X^2+1)(X^2-2X+2).
\end{aligned}$$

Les deux polynômes de degré 2 ont un discriminant strictement négatif, ils ne possèdent pas de racine réelle et sont donc irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.