

CHAPITRE XXII : DÉNOMBREMENT

Correction

- a) Notons $\text{card}(E) = n$ et a_1, \dots, a_n les éléments de E de telle sorte que $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. La fonction f est définie sur E et à valeurs dans F . L'ensemble $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ est donc un sous-ensemble de F . A priori, le n -uplet $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ peut contenir des répétitions. Cependant, les éléments a_1, \dots, a_n étant deux à deux distincts et f étant injective, on déduit que les éléments $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sont également deux à deux distincts. L'ensemble F contient alors une partie de cardinal $n = \text{card}(E)$. Donc $\text{card}(F) \geq \text{card}(E)$.
- b) Notons p le cardinal de F et b_1, \dots, b_p ses éléments de telle sorte que $F = \{b_1, \dots, b_p\}$. La fonction f étant surjective, tout élément b_i de F admet au moins un antécédent par f dans E . Soit $a_i \in E$ tel que $f(a_i) = b_i$ ($1 \leq i \leq p$). Les éléments a_1, \dots, a_p sont deux à deux distincts car les éléments b_1, \dots, b_p le sont. Ainsi, E contient une partie $\{a_1, \dots, a_p\}$ à p éléments. Il s'ensuit $\text{card}(F) = p \leq \text{card}(E)$.