CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

a) Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que
$$\lambda_0 B_0 + \cdots + \lambda_n B_n = 0.$$
On montre par récurrence forte sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $\lambda_k = 0$ pour tout entier $\in [\![0, n]\!]$.

Pour $k = 0$. On remarque que le terme constant du polynôme $\lambda_0 B_0 + \cdots + \lambda_n B_n$ est λ_0. Par conséquent, le polynôme $\lambda_0 B_0 + \cdots + \lambda_n B_n$ étant le polynôme nul, il vient $\lambda_0 = 0$.

Supposons que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, on ait $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0$. Dès lors, on a
$$\lambda_{k+1} B_{k+1} + \cdots + \lambda_n B_n = 0.$$
On remarque que le coefficient en X^{k+1} du polynôme $\lambda_{k+1} B_{k+1} + \cdots + \lambda_n B_n$ est λ_{k+1}. Par conséquent, le polynôme $\lambda_{k+1} B_{k+1} + \cdots + \lambda_n B_n$ étant le polynôme nul, il vient $\lambda_{k+1} = 0$.

Ceci achève la récurrence. Par récurrence, la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. Par ailleurs, elle est de cardinal $n+1$ qui est également la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$. Il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

b) On remarque que $B_n(X) = \binom{n}{n} X^n (1-X)^0 = X^n = 0 \cdot B_0 + \cdots + 0 \cdot B_{n-1} + 1 \cdot B_n$ donc les coordonnées de X^n dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Grâce à la formule du binôme de Newton, on remarque que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + 1 - X)^n = 1$ donc
$$1 = 1 \cdot B_0 + \cdots + 1 \cdot B_n.$$
Ainsi les coordonnées de 1 dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Il s'ensuit
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kB_k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= nX \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} = nX(X+1-X)^{n-1} = nX.\end{aligned}$$
On obtient alors
$$X = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_k.$$

Ainsi les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/n \\ 2/n \\ \vdots \\ (n-1)/n \\ 1 \end{pmatrix}$.