CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

a) Remarque : La formule de Grassmann montre que si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $A+B$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et
$$\dim(A+B) \leqslant \dim A + \dim B.$$
Dès lors, on a $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v$ donc
$$\mathrm{rg}(u+v) = \dim(\mathrm{Im}(u+v)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}u) + \dim(\mathrm{Im}v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$
En appliquant cette inégalité aux applications linéaires $u+v$ et $-v$, on obtient
$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u+v+(-v)) \leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(-v) = \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(v) \text{ donc } \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v).$$
De même, en considérant les applications linéaires $u+v$ et $-u$, on obtient
$$\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u+v+(-u)) \leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(-u) = \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(u) \text{ donc } \mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u)) \leqslant \mathrm{rg}(u+v).$$
On en déduit
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v).$$

b) On a $u \circ v = 0$ donc $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$ de quoi l'on déduit $\mathrm{rg}(v) \leqslant \dim(\ker u)$. En appliquant le théorème du rang à u, on peut alors écrire
$$\dim E = \dim(\ker u) + \mathrm{rg}(u) \geqslant \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u).$$
Par ailleurs, on a $u+v$ qui est un automorphisme de E donc $\mathrm{rg}(u+v) = \dim E$. Par conséquent, en appliquant l'inégalité obtenue lors de la question précédente, on peut écrire
$$\dim E = \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$
Par double inégalité, on obtient $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim E$.