CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

a) • Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Montrons que $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On peut alors écrire

$$v(y) = v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u).$$

Par conséquent, $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
• Soit $x \in \ker(u)$, ie $u(x) = 0$. Montrons que $v(x) \in \ker(u)$. On a

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$$

donc $v(x) \in \ker(u)$. Par conséquent, $\ker(u)$ est stable par v.

b) On montre $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Montrons que $y \in \ker(v)$, ie $v(y) = 0$.
On a $y \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$ donc il existe $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \ker(v)$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors

$$y = u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2) \quad \text{car } x_1 \in \ker(u).$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} v(y) &= v(u(x_2)) = v \circ u(x_2) = u \circ v(x_2) \text{ car } u \circ v = v \circ u, \\ &= u(v(x_2)) = u(0) \quad \text{car } x_2 \in \ker(v), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $y \in \ker(v)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$. Les rôles de u et v étant symétriques, on montre exactement de la même manière $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$.

c) Si E est de dimension finie. On a $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$ donc

$$\dim E = \dim \ker(u) + \dim \ker(v).$$

De plus, grâce au théorème du rang, on a

$$\dim E = \dim \ker(u) + \mathrm{rg}(u).$$

Il s'ensuit $\dim \ker(v) = \mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}(u)$. Sachant, d'après la question précédente, que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$, avec l'égalité des dimensions, il vient $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$. Les rôles de u et v étant symétriques, on montre exactement de la même manière $\mathrm{Im}(v) = \ker(u)$.