CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

$\diamond$ On a

$$f \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+2 \end{cases} \quad , \quad f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{cases} \quad , \quad g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)^2 \end{cases} \quad \text{et } g \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{cases} \quad .$$

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f \circ g(x) = x^2 + 1 = x^2 + x + 2 - (x+1) = g(x) + f \circ f(x) - f(x)$$
$$\text{et } g \circ f(x) = x^2 + 3(x+1) - (x+2) = g(x) + 3f(x) - f \circ f(x)$$

donc $f \circ g = g + f \circ f - f \in \mathrm{Vect}(f, g, f \circ f, g \circ g)$ et $g \circ f = g + 3f - f \circ f \in \mathrm{Vect}(f, g, f \circ f, g \circ g)$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{Vect}(f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g) = \mathrm{Vect}(f, g, f \circ f, g \circ g).$$

On montre que la famille $(f, g, f \circ f, g \circ g)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. $\diamond$ Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f + \lambda_2 f \circ f + \mu_1 g + \mu_2 g \circ g = 0$. Autrement dit, pour tout réel x, on a

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x+2) + \mu_1 x^2 + \mu_2 x^4 = 0. \tag{1}$$

En dérivant cette relation, il vient, pour tout réel x,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 x + 4\mu_2 x^3 = 0.. \tag{2}$$

En évaluant les relations (1) et (2) en $x = 0$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad .$$

La relation (1) se réécrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 x^2 + \mu_2 x^4 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 + \mu_2 x^2 = 0.$$

En particulier, pour $x = 0$ il vient $\mu_1 = 0$ puis on en déduit $\mu_2 = 0$.
$\diamond$ Par conséquent, la famille $(f, g, f \circ f, g \circ g)$ est libre. Grâce à la caractérisation des familles libres par le rang, il vient

$$\mathrm{rg}(f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g) = \mathrm{rg}(f, g, f \circ f, g \circ g) = 4.$$