CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

a) Soit $u = (x, y, z, t) \in F$. On a $z = -x - y$ et $t = 2x + y + z = x$. Par conséquent, on peut réécrire

$$u = (x, y, -x - y, x) = x(1, 0, -1, 1) + y(0, 1, -1, 0).$$

En posant $e_1 = (1, 0, -1, 1)$ et $e_2 = (0, 1, -1, 0)$, on obtient que (e_1, e_2) est une famille génératrice de F. Par ailleurs, les vecteurs e_1 et e_2 n'étant pas colinéaires, la famille (e_1, e_2) est une famille libre. Par conséquent, la famille (e_1, e_2) est une base de F et $\dim F = 2$.

b) On vérifie que les vecteurs $(1, -2, 1, 1)$, $(1, 2, -3, 1)$ et $(5, -3, -2, 5)$ appartiennent à F. Comme F est stable par combinaison linéaire, toute combinaison linéaire en $(1, -2, 1, 1)$, $(1, 2, -3, 1)$ et $(5, -3, -2, 5)$ appartient à F. Autrement dit,

$$G = \text{Vect}\,\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\} \subset F.$$

On vérifie par ailleurs que $(5, -3, -2, 5) \in \mathit{Vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1)\}$ puisque

$$(5, -3, -2, 5) = \frac{13}{4}(1, -2, 1, 1) + \frac{7}{4}(1, 2, -3, 1)$$

donc $G = \text{Vect}\,\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1)\}$. Les vecteurs $(1, -2, 1, 1)$ et $(1, 2, -3, 1)$ n'étant pas colinéaires, la famille $((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1))$ est une famille libre donc une base de G. Par conséquent, on a $G \subset F$ et $\dim G = 2 = \dim F$ donc $G = F$.

c) La famille (e_1, e_2) étant libre dans $\mathbb{R}^4$, on la complète avec des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ en une base de $\mathbb{R}^4$ (théorème de la base incomplète).

On vérifie que $e_3 = (0, 0, 1, 0) \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$ donc, grâce au principe d'extension des familles libres, la famille (e_1, e_2, e_3) est encore une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

On vérifie que $e_4 = (1, 0, 0, 0) \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc, grâce au principe d'extension des familles libres, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est encore une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Comme (e_1, e_2) est une base de F, on en déduit que $\text{Vect}(e_3, e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.