CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Correction

a) Soit $u = (x, y, z, t) \in F$. On a $x + y = 0$ et $x + z = 0$ donc $y = -x$ et $z = -x$. On peut alors réécrire

$$u = (x, -x, -x, t) = x(1, -1, -1, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$

En posant $e_1 = (1, -1, -1, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 0, 1)$, on vient de montrer que la famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de F. De plus, les vecteurs e_1 et e_2 n'étant pas colinéaires, la famille (e_1, e_2) est également une famille libre de F. Par conséquent, la famille (e_1, e_2) est une base de F.

b) On considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ qui fournit une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la famille libre (e_1, e_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ avec des vecteurs de la base canonique.

En notant $e_3 = (1, 0, 0, 0)$, on vérifie que $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$ donc la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ grâce au principe d'extension des familles libres.

En notant $e_4 = (0, 1, 0, 0)$, on vérifie que $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ grâce au principe d'extension des familles libres. De plus, elle est de cardinal 4 égal à la dimension de $\mathbb{R}^4$, on en déduit que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 4\lambda_2).$$

Par conséquent, on a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

d) On a $G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. La famille (u_1, u_2, u_3) étant libre, on a

$$\dim G = \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3.$$

e) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ de telle sorte que $au_1 + bu_2 + cu_3 \in G$. Ce vecteur se réécrit sous la forme

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (a + b - c, a + 2b, a + 3b - c, a + 4b).$$

Dès lors, on a

$$au_1 + bu_2 + cu_3 \in F \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b - c) + (a + 2b) = 0 \\ (a + b - c) + (a + 3b - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 2a + 4b - 2c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c - 2b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}.$$

On peut alors réécrire $au_1 + bu_2 + cu_3 = c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$. En posant $w = (-1, 1, 1, 3)$, on vérifie immédiatement que $w \in F$ et on remarque que $w = -u_1 + u_2 + u_3 \in G$. On vient de montrer que $F \cap G = \text{Vect}(w)$. Ainsi, on a (w) qui est une base de $F \cap G$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

f) On a $F+G \subset \mathbb{R}^4$. De plus, grâce à la formule de Grassmann et en utilisant les résultats des questions *a*), *d*) et *e*), il vient

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2+3-1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4).$$

On a ainsi $F+G \subset \mathbb{R}^4$ et $\dim(F+G) = \dim \mathbb{R}^4$ donc $F+G = \mathbb{R}^4$.