CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Correction

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0.$$
En développant, il vient
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p ep + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a = 0.$$
Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p \neq 0$, on peut réécrire
$$a = \frac{-\lambda_1}{\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k} e_1 + \cdots + \frac{-\lambda_p}{\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k} e_p \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$$
ce qui est absurde puisque, par hypothèse, on a $a \notin \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0$ puis
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p ep = 0.$$
La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ étant libre, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Par conséquent, la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.