CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Correction

a) On note P le polynôme $P = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X^{i-1} = \gamma_1 + \gamma_2 X + \cdots + \gamma_n X^{n-1}$. On a

$$\gamma_1 C_1 + \cdots + \gamma_n C_n = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + \gamma_n \begin{pmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \\ \vdots \\ x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a

$$\gamma_1 C_1 + \cdots + \gamma_n C_n = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(x_i) = 0.$$

Les x_i étant deux à deux distincts, le polynôme P, qui est de degré $n-1$, admet ainsi au moins n racines distinctes ce qui n'est possible que si P est le polynôme nul. Puisque P est le polynôme nul, tous ses coefficients se retrouvent être nuls, ie $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$.
On vient de montrer que la famille $(C_1, ..., C_n)$ est libre. Par conséquent, c'est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n)$ et on en déduit

$$\mathrm{rg}(C_1, ..., C_n) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n) = \mathrm{card}(C_1, ..., C_n) = n.$$

b) $\diamond$ S'il existe deux entiers i et j distincts de $[\![1, n]\!]$ tels que $x_i = x_j$ alors le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ constitué que de 0 sauf sur les lignes i et j, est une solution non nulle du système linéaire homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow V^T X = 0.$$

Par conséquent, la matrice V^T n'est pas inversible et donc V ne l'est pas non plus. Par contraposée, si V est inversible alors les x_i sont deux à deux distincts.

$\diamond$ On suppose que les x_i sont deux à deux distincts et on pose $X = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$VX = 0 \Leftrightarrow \gamma_1 C_1 + \cdots + \gamma_n C_n = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Par conséquent, la matrice V est inversible.