CHAPITRE XXI : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE
Correction

a) $\diamond$ On montre tout d'abord que la famille (u, v, w) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 &\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (L_1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \quad (L_2) \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (L_3) \end{cases}.\end{aligned}$$

En faisant $L_1 + L_2$, il vient $\lambda_1 = 0$. En faisant $L_1 + L_3$, il vient $\lambda_3 = 0$. Enfin, en faisant $L_2 + L_3$, il vient $\lambda_2 = 0$. Par conséquent, la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
$\diamond$ Montrons que c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $t = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On résolvant le système $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = t$ d'inconnues λ_1, λ_2 et λ_3 comme ci-dessus, on vérifie que

$$t = \frac{\alpha + \beta}{2} u + \frac{\beta + \gamma}{2} v + \frac{\alpha + \gamma}{2} w \in \text{Vect}(u, v, w). \tag{1}$$

Par conséquent, la famille (u, v, w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
$\diamond$ La famille (u, v, w) est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On remarque que (u, v, w) contient trois vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc il était suffisant de prouver que (u, v, w) était soit libre, soit génératrice pour conclure.

b) En reprenant la relation (1), on obtient

$$(2, 1, 3) = \frac{3}{2} u + 2v + \frac{5}{2} w$$

donc les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans la base (u, v, w) sont $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.