CHAPITRE XX : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Correction

a) En posant $x = \frac{1}{h}$ avec h tendant vers 0^+, on peut écrire

$$f(x) = x\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) = x\ln\left(2(1+\frac{1}{2x})\right) = x\ln 2 + x\ln(1+\frac{1}{2x}) = \frac{\ln 2}{h} + \frac{\ln(1+\frac{h}{2})}{h}$$
$$= \frac{\ln 2}{h} + \frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} - \frac{(\frac{h}{2})^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2)\right) = \frac{\ln 2}{h} + \frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \underset{h\to 0^+}{o}(h).$$

Par conséquent, on obtient

$$f(x) = x\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il s'ensuit que la droite d'équation $y = x\ln 2 + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

b) Le développement limité précédent fournit l'équivalent $f(x) - \left(x\ln 2 + \frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x}$ qui est de signe négatif au voisinage de $+\infty$. Les équivalents préservant le signe, au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \leqslant \left(x\ln 2 + \frac{1}{2}\right)$. Autrement dit, la courbe représentative de f est en dessous de son asymptote en $+\infty$.