CHAPITRE XX : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS
Correction

a) On a $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $\arctan(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}\arctan(2x) - 2\arctan(x) &= \left(2x - \frac{(2x)^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= -2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\arctan(2x) - 2\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2x^3$.

b) On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ donc

$$\begin{aligned}x(2+\cos x) - 3\sin x &= x\left(3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \\ &= \left(\frac{1}{4!} - \frac{3}{5!}\right)x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5) = \frac{x^5}{60} + \underset{x\to 0}{o}(x^5).\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $x(2+\cos x) - 3\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{60}$.

c) On a $x^x - (\sin x)^x = x^x\left[1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right]$. D'une part, on a $x^x = e^{x\ln x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. D'autre part, on a

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{x\ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} = e^{-\frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

donc

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Ainsi, on a $1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$. Par opérations sur les équivalents, on obtient

$$x^x - (\sin x)^x = x^x\left[1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right] \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}.$$