CHAPITRE XX : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS
Correction

a) On a $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2 \sin^2 x}$. Par ailleurs, le développement limité de sin à l'ordre 3 en 0 s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

de quoi l'on déduit $x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ puis $x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3!}$. Par ailleurs, le développement limité de sin à l'ordre 1 en 0 s'écrit

$$\sin x = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

de quoi l'on déduit $x + \sin x = 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ puis $x + \sin x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. En utilisant l'équivalent usuel $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, par opérations sur les équivalents, on obtient

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2 \sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3!}\cdot 2x}{(x\cdot x)^2} = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.

b) On a $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$. En utilisant le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2, on peut écrire $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Par ailleurs, étant donné que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, par opérations sur les équivalents, il vient

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x} = -\frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$.

c) On a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} - e &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e = e^{1-\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)} - e = e\left[e^{-\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)} - 1\right] = e\left[\left(1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - 1\right] \\ &= e\left[-\frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)\right].\end{aligned}$$

Dès lors, on obtient $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = e\frac{-\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = -\frac{e}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$. Il s'ensuit

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$