CHAPITRE XX : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Correction

On a $\ln(1+t) = t + \underset{t\to 0}{o}(t)$ et $\ln(1-t) = -t + \underset{t\to 0}{o}(t)$ donc

$$\ln(1+t)\ln(1-t) = \left(t + \underset{t\to 0}{o}(t)\right)\left(-t + \underset{t\to 0}{o}(t)\right) = -t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2).$$

On considère la fonction F définie sur $]-1,1[$ par $F(u) = \int_0^u \ln(1+t)\ln(1-t)dt$ qui vérifie $F'(u) = \ln(1+u)\ln(1-u)$. Par intégration des développements limités, on a

$$F(u) = F(0) - \frac{u^3}{3} + \underset{u\to 0}{o}(u^3) = -\frac{u^3}{3} + \underset{u\to 0}{o}(u^3).$$

Dès lors, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on a

$$g(x) = \int_x^{2x} \ln(1+t)\ln(1-t)dt = F(2x) - F(x) = -\frac{(2x)^3}{3} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = -\frac{7x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$