CHAPITRE XX : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS
Correction

a) En posant $u = x + x^2$, on a $u^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$, $u^3 = x^3 + 3x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, $u^4 = x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ et $\underset{u\to 0}{o}(u^4) = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. En utilisant le développement limité $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{u\to 0}{o}(u^4)$, il vient

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - (x+x^2) + (x^2+2x^3+x^4) - (x^3+3x^4) + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = 1 - x + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

b) On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc

$$\frac{1}{\cos(x)+1} = \frac{1}{2 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right].$$

De plus, on a $\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc

$$\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} = \left[-1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

c) On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$ ainsi que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$. Par conséquent, il vient

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}.$$

Par ailleurs, on peut écrire $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)} = \frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Or $u^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $\frac{1}{1-u} = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u)$ donc

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} &= \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right] \cdot \left[1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$