# **CHAPITRE XX :** DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS
Correction

a) On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ et

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= 1 + \frac{1}{2}(-x) - \frac{1}{8}(-x)^2 + \frac{1}{16}(-x)^3 - \frac{5}{128}(-x)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\\ &= -x - \frac{1}{8}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

b) On a $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$ et

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(2x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right)\cdot\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\\ &= x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5!}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\\ &= x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6).\end{aligned}$$

c) On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}(\ln(1+x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\cdot\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\\ &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).\end{aligned}$$

d) On pose $x = 2 + h$ avec $h \to 0$. On peut alors réécrire $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}$. Par ailleurs, on a

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \underset{u\to 0}{o}(u^4)$ donc, en posant $u = \frac{h}{2}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} \\
&\sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4)\right] \\
&= \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}h - \frac{1}{32}h^2 + \frac{1}{128}h^3 - \frac{5}{2048}h^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4)\right] \\
&= \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{32}(x-2)^2 + \frac{1}{128}(x-2)^3 - \frac{5}{2048}(x-2)^4 + \underset{x\to 2}{o}((x-2)^4)\right].
\end{aligned}$$