CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ

Correction

a) On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. Pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} \text{ et } f''(x) = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln x)^2} \leqslant 0.$$

La fonction f se retrouve être croissante sur $]1,+\infty[$.

b) Soit $(x,y) \in]1,+\infty[^2$. Grâce à l'inégalité de concavité, on a

$$\ln\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{1}{2}(\ln(\ln x) + \ln(\ln y)) = \ln(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}).$$

En composant par la fonction exp qui est croissante, on obtient $\sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$.