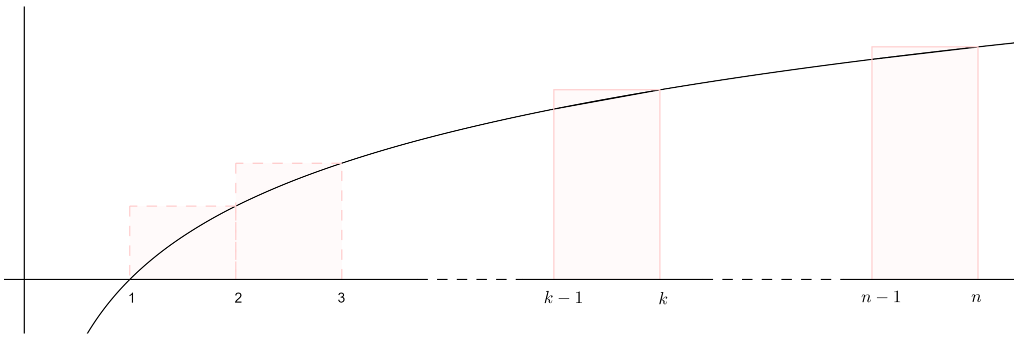
CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ

Correction

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité demandée repose sur l'observation ci-dessous qui sera justifiée par la suite : la somme des aires des rectangles est supérieure à l'aire sous la courbe de la fonction ln définie sur $[1, n]$.



On décompose l'intervalle $[1, n]$ sous la forme $[1, n] = \bigcup\limits_{k=2}^{n} [k-1, k]$.

Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la fonction ln est croissante sur $[k-1, k]$ donc, pour tout $t \in [k-1, k]$, on a $\ln t \leqslant \ln k$, puis par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln(k)dt = \ln(k).$$

En sommant toutes ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \ln(n!). \tag{1}$$

Par ailleurs, grâce à la relation de Chasles, on a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)dt &= \underbrace{\int_{1}^{2} \ln(t)dt}_{k=2} + \underbrace{\int_{2}^{3} \ln(t)dt}_{k=3} + \underbrace{\int_{3}^{4} \ln(t)dt}_{k=4} + \cdots + \underbrace{\int_{n-1}^{n} \ln(t)dt}_{k=n} = \int_{1}^{n} \ln(t)dt \\ &= [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

En revenant à l'inégalité (1), on obtient

$$\ln(n!) \geqslant n\ln(n) - n + 1 \geqslant n\ln(n) - n = n\ln\left(\frac{n}{e}\right).$$

b) Avant de répondre à la question posée, on rappelle :

- (Inégalité arithmético-géométrique) Pour tout $(a_1, ..., a_n) \in]0, +\infty[^n$, $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,
- $(n!)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{e}$ d'après la question précédente.

Soit $(x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[^n$. On peut écrire

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} kx_k}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} kx_k\right)^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k}{\frac{n}{e}} = \frac{e}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx_k.$$