CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ

Correction

a) On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f : t \mapsto \left(1+t^{\frac{1}{p}}\right)^p$. Pour tout réel $t>0$, on a

$$f'(t) = t^{\frac{1}{p}-1}\left(1+t^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \text{ et } f''(t) = -\frac{p-1}{p}t^{\frac{1}{p}-2}\left(1+t^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} \leqslant 0.$$

La fonction f se retrouve être concave.

b) Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et soit $(t_1,...,t_n) \in]0,+\infty[^n$. La fonction f étant concave, grâce à l'inégalité de Jensen, on peut écrire

$$\left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k t_k\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k t_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(t_k) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(1+t_k^{\frac{1}{p}}\right)^p = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^{\frac{1}{p}}\right)^p\left(1+t_k^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Autrement dit, on a bien

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^{\frac{1}{p}}(1+t_k^{\frac{1}{p}})\right)^p \leqslant \left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k t_k\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

c) Soient $(a_1,...,a_n) \in]0,+\infty[^n$ et $(b_1,...,b_n) \in]0,+\infty[^n$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose

$$\lambda_k = \frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \text{ et } t_k = \frac{b_k^p}{a_k^p}$$

de telle sorte que $\lambda_k t_k = \frac{b_k^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}$. Les coefficients t_1,..., t_n sont strictement positifs et par construction, on a bien $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. L'inégalité de la question précédente se réécrit

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^{\frac{1}{p}} + (\lambda_k t_k)^{\frac{1}{p}}\right)^p \leqslant \left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k t_k\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{b_k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p \leqslant \left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \leqslant \frac{\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}
\end{aligned}$$

ce qui donne au final l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$