CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ

Correction

a) Soit $x_0 \in I$. On montre que f est continue à gauche en x_0. Puisque I est un intervalle ouvert, il existe a et b dans I tels que $a < x_0 < b$. Pour tout $x \in]a, x_0[$, par croissance de la fonction $t \mapsto \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$, on a

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

puis

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x_0-x) \leqslant f(x_0)-f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x_0-x).$$

En faisant tendre x vers x_0^-, grâce au théorème des gendarmes, il vient $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, ie f est continue à gauche en x_0.
Pour la continuité à droite, on procède de même en prenant $x \in]x_0, b[$ et en écrivant cette fois

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

puis

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0) \leqslant f(x)-f(x_0) \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0).$$

On obtient $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, ie f est continue à droite en x_0.
La fonction f étant continue à droite et à gauche en x_0, elle est continue en tout point x_0 de I, donc continue sur I.

b) La fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle fermé $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]0,1[, \\ 38 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0 ni en 1 mais est bien convexe sur $[0,1]$. Sa représentation graphique permet de se convaincre que son graphe est sous toutes ses cordes.