CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ
Correction

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ et } f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f se retrouve être convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs. La fonction f étant convexe, avec $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, l'inégalité de Jensen donne

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} t_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(t_k) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Leftrightarrow \ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} t_k}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+e^{t_k})$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \left(e^{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^{n} (1+e^{t_k}) \Leftrightarrow \ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^{n} e^{t_k}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n} (1+e^{t_k})\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} e^{t_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1+e^{t_k})\right)^{\frac{1}{n}}$$

En particulier, en prenant $t_k = \ln x_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ de telle sorte que $e^{t_k} = x_k$, il vient

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

c) On applique l'inégalité de la question précédente avec $x_k = \frac{b_k}{a_k} > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On remarque pour cela que

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k} = \frac{b_1}{a_1} \times \cdots \times \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1 \times \cdots \times b_n}{a_1 \times \cdots \times a_n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} b_k}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}.$$

Il vient

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k+b_k}{a_k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 1 + \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$