# **CHAPITRE XIX :** RELATIONS DE COMPARAISON
## Correction

a) On a $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, $1+2x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $x^2-x^4 = x^2(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Par opérations sur les équivalents, il vient
$$\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
Par conséquent, on obtient
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4} = \frac{1}{2}.$$

b) En posant $x = \frac{\pi}{2}+h$, on a
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-2h)^2}.$$
Or $1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = 1-\cos h \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h^2}{2}$ donc, par opérations sur les équivalents, il vient
$$\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-2h)^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{\frac{h^2}{2}}{4h^2} = \frac{1}{8}.$$
Par conséquent, on obtient
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-2h)^2} = \frac{1}{8}.$$

c) On a $1+x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} (x^2)^{\frac{1}{2}} = x$. Par ailleurs, on a $\frac{2x}{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+x+1} = 0.$$
Par ailleurs, on a $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc par composition des limites, on obtient
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right)}{\frac{2x}{x^2+x+1}} = -1, \quad \textit{ie} \quad \ln\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{x}.$$
Par opérations sur les équivalents, il vient
$$\sqrt{1+x}\ln\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\left(-\frac{2}{x}\right) = -2$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}\ln\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right) = -2.$$