CHAPITRE XIX : RELATIONS DE COMPARAISON
Correction

a) En multipliant par la quantité conjuguée, on peut écrire

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{2}=1$ donc $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\underset{x\to 0}{\sim}2$ puis

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2x^2}{2}=x^2.$$

b) On écrit $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$. En utilisant les équivalents $\tan x\underset{x\to 0}{\sim}x$ et $1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}$, on obtient $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3}{2}$.

c) On a $e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$ donc $e^x-1=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$. Dès lors $e^x+x-1=2x+\underset{x\to 0}{o}(x)$ ce qui donne

$$e^x+x-1\underset{x\to 0}{\sim}2x.$$