CHAPITRE XIX : RELATIONS DE COMPARAISON

Correction

a) On a $x^3+2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ et $x^2+3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{(x^2+3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(x^3+2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+3)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{(x^3)^{\frac{1}{2}}}{(x^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{5}{6}}.$$

b) On a $x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $x^2-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, ce que l'on peut écrire sous la forme $\sqrt{x^2+1} = x + \underset{x\to+\infty}{o}(x)$ et $\sqrt{x^2-1} = x + \underset{x\to+\infty}{o}(x)$. Par conséquent, on a

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} = x + \underset{x\to+\infty}{o}(x) + (x + \underset{x\to+\infty}{o}(x)) = 2x + \underset{x\to+\infty}{o}(x).$$

Ainsi, on a $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

c) En multipliant par la quantité conjuguée, on peut écrire

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}.$$

En utilisant le résultat de la question b), on obtient

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$